А. А. Ляпина, Т. Ф. Мамедова, Ю. В. Напалкова
Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарева, lyapina@e-mordovia.ru

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{1}$$

где $A(t) : [T,+\infty) \to \mathrm{Hom}\,(R^n, R^n)$ — непрерывное отображение, $f \in C(D)$, $D = [T,+\infty) \times R^n$. Предположим также, что уравнение (1) имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{2}$$

Пусть для уравнений (1) и (2) выполнены условия [1, 2]:

$N = \{1, 2, ..., n\}$, $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N$,

$R_0 = \{x : x \in R^n, x = colon(x_1, ..., x_n)\}$, $x_j = 0$, $j \neq \overline{M_0}$,

$$|f_j(t, x_1, ..., x_n)| \leqslant \lambda_j(t, |x_{j1}|, ..., |x_{jq}|), \ \forall j \subseteq N, \ \{j_1, ..., j_q\} \subseteq M_0;$$

$$\lambda_j : [T,+\infty) \times R^q_+ \to R^1_+, \ R^1_+ = [0,+\infty), \ \lambda_j \in C\left([T,+\infty) \times R^q_+\right),$$

$\lambda_j(t, r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_q) \leqslant \lambda_j(t, \overline{r_1}, \ldots, \overline{r_i}, \ldots, \overline{r_q})$, $r_i \leqslant \overline{r_i}$, $i = \overline{1,q}$ при всех $t \in [T,+\infty)$.

$$Y(t) = (y_{ij}(t)), \quad i,\ j = \overline{1,n}, \quad t_0 \in [T_0,+\infty), \quad T_0 \geqslant T,$$

$$Y^{-1}(t) = (y^{ij}(t)), \quad i,\ j = \overline{1,n},$$

$$\mu_i : [T,+\infty) \to R^1_+, \quad m_i : [T,+\infty) \to R^1_+, \quad R^1_+ = [0,+\infty),$$

$\mu_i \geqslant \max|y_{ij}(t)|$, $T_0 \leqslant t_0 \leqslant t < +\infty$, $i \in M_0$, если $N_0 \neq 0$, $j \in N_0$ и $\mu_i(t) \geqslant 0$, если $N_0 = 0$, $i \in M_0$, $m_i(t) \geqslant \max\{\max|y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\}$, $T_0 \leqslant t_0 \leqslant t < +\infty$, $i \in M_0$,

$$J_i(t,\varphi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j\in N, k\in B} y_{ik}(t) y^{jk}(r) f_j(r,\varphi(r))dr - \\ - \int_{t}^{+\infty} \sum_{j\in N, k\in B} y_{ik}(t) y^{jk}(r) f_j(r,\varphi(r))dr. \quad (3)$$

Тогда справедлива

Теорема. *Пусть уравнения* (1) *и* (2) *асимптотически эквивалентны по Брауеру, условие* (3) *имеет место равномерно относительно* $0 < c < +\infty$ *при* $t \to +\infty$ *и* $J_i(t,c)/\mu_i(t) \to 0$ *равномерно по* t *при* $c \to 0$, $\mu_i(t) \to 0$ $\forall t \in [T, +\infty)$, $\forall i \in \in M_0$. *Тогда для того чтобы тривиальное решение уравнения* (1) *было устойчиво (асимптотически устойчиво) по части переменных, необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (2) *было устойчиво (асимптотически устойчиво) по той же части переменных.*

Данная теорема позволяет анализировать структурную устойчивость моделей экономических процессов по части переменных и делать выводы об устойчивости этих процессов на основе совокупности свойств устойчивости подсистем и природе их взаимодействия.

Пример. Рассмотрим замкнутую экономику, то есть экономику без внешних обменов, и выделим в ней экономические агенты: производство, население, государство, банковская система. Предполагается, что все указанные агенты находятся в рыночных отношениях совершенной конкуренции. Каждый из них обменивается продуктами и ресурсами посредством купли-продажи на рынках по ценам, которые складываются в результате взаимодействия совокупного спроса и предложения товаров. Ни один экономический агент не в состоянии в одиночку воздействовать на цены, но каждый из агентов по сложившимся ценам может реализовать свое предложение и удовлетворить свой платежеспособный спрос. Таким образом, объем продаж ограничен только совокупным платежеспособным спросом. На всех рынках экономические агенты расплачиваются одними и теми же платежными средствами.

Теперь рассмотрим поведение и отношения экономических агентов подробнее, чтобы замкнуть систему уравнений.

Будем считать, что нет спекулятивного спроса экономических агентов на банкноты, количество наличных банкнот в обращении не изменяется.

Рассмотрим систему балансовых уравнений: уравнение изменения мощностей и уравнение изменения запаса, где x_1 — новые мощности, а x_2 — поток платежей:

$$\begin{cases} dx_1/dt = -x_1, \\ dx_2/dt = -x_2 + e^{-t}x_2|\sin x_1|, \end{cases} \tag{4}$$

и соответствующую ей систему однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dy_1/dt = -y_1, \\ dy_2/dt = -y_2. \end{cases} \tag{5}$$

Фундаментальная матрица решений системы (5) и обратная к ней имеют вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}; \quad Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{s} & 0 \\ 0 & e^{s} \end{pmatrix}.$$

Множество $N = \{1, 2\}$, $\tilde{M}_0 = N$, $M_0 = \{2\}$, так как

$$\|f_2(t,x)\| \leqslant \frac{x_2|\sin x_1|}{e^t} \leqslant \frac{|x_2|}{e^t} = \lambda_2(t, |x_2|).$$

Найдем μ_i и m_i, $i \in M_0$, $\mu_2(t) = e^{-t}$, $m_2 = \max\{e^{-t}, e^{-t}\} = e^{-t}$. Проверим условие (3): $B = N - M = \{1\}$, $|\phi_1| \leqslant cm_1(t)$,

$$|J_1(t,\varphi)| \leqslant \int_{t_0}^{t} y_{11}y^{11} f_2(s,\phi(s))ds + \int_{t_0}^{t} |y_{11}y^{21}| f_2 ds - \\ - \int_{t}^{+\infty} (|y_{12}y^{12}| f_1 + |y_{12}y^{22}| f_2) ds = 0,$$

$$|J_2(t,\varphi)| \leqslant \int_{t_0}^{+\infty} |e^{-t}e^{s}| \frac{ce^{-s}}{e^{s}} ds;$$

Отсюда видно, что J_1, J_2 существуют и несобственные интегралы сходятся, $J_2(t,\varphi) = o(\mu_2(t))$, $t \to +\infty$

Все решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = e^{-t}z$$

определены $\forall t_0 \geqslant 0$, $z_0 \in R^1_{+\infty}$. Таким образом, выполняются все условия теоремы. Так как система уравнений (5) асимптотически устойчива по переменной y_2, то тривиальное решение системы (4) также асимптотически устойчиво по переменной x_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воскресенский Е. В. *Методы сравнения в нелинейном анализе.* – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1990. – 224 с.

2. Воскресенский Е. В., Мамедова Т. Ф. *Асимптотические методы по части компонент решений дифференциальных уравнений* // Тр. семинара по диф. ур-ям Мордов. ун-та, Саранск., янв. – июнь 1992, Мордов. ун-т, Саранск, 1992. – Деп. в ВИНИТИ 07.09.92. – № 2734, Вып. 92. – С. 6-112.